# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classes terminale C et terminale E) DURÉE : 5 heures

*Le problème et l'exercice sont indépendants*

## EXERCICE

Soit (A, B, C, D) un tétraèdre non aplati et G l'isobarycentre de ses sommets.

1° Montrer qu'il existe exactement trois plans passant par G et coupant les faces du tétraèdre suivant un parallélogramme.

2° Que peut-on dire du tétraèdre si ces trois parallélogrammes sont des carrés ?

## PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; affixes et coordonnées seront toujours pris dans ce repère.

I désignera le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

Pour tout point A et tout nombre réel $r > 0$, on notera $\Gamma(A, r)$ le cercle de centre A et de rayon $r$, et $D(A, r)$ le disque ouvert de centre A et de rayon $r$ (c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $AM < r$).

Dans tout le problème, $f$ désignera l'application qui au point M d'affixe $z$ associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = z + z^2$.

Si K est une partie quelconque du plan, on notera $f(K)$ l'ensemble des points $f(M)$ lorsque M décrit K, et on notera $f^{-1}(K)$ l'ensemble des points M tels que $f(M)$ soit dans K.

### I

Étude de quelques propriétés géométriques de $f$, utiles pour la suite du problème.

1° Quels sont les points invariants par $f$ ?

Trouver de même les points invariants par $g$, où $g = f \circ f$.

2° Déterminer une transformation $s$ du plan telle que, pour tous points M et N, on ait $f(M) = f(N)$ si et seulement si M = N ou M = $s$(N).

3° Pour tout nombre réel $r > 0$, reconnaître $f(D(I, r))$.

Trouver $r_0 > 0$, le plus petit possible, tel que pour tout point M extérieur au disque $D(I, r_0)$ on ait $IM' \geqslant IM$ (on rappelle que $M' = f(M)$).

4° Soit $\Delta$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient :

$$-1 < x < 0 \quad \text{et} \quad y^2 < x^2 + x + 1$$

Soit de même V l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient :

$$-1 < x < 0 \quad \text{et} \quad x + y^2 < 0$$

Représenter graphiquement $\Delta$ et V, et montrer que $\Delta = f^{-1}(V)$.

Reconnaître $f(\Delta)$ et montrer que $f(\Delta)$ est inclus dans $\Delta$.

5° Soit $(\Gamma)$ un cercle tangent en O à l'axe $Ox$, M un point de $(\Gamma)$ distinct de O. Que peut-on dire de la droite (M M') et de $(\Gamma)$ ?

### II

NOTATIONS ET DÉFINITIONS :

Si $x$ et $y$ sont deux nombres réels et $z = x + iy$, on notera $x = \mathrm{Re}\, z$ et $y = \mathrm{Im}\, z$; on notera $\bar{z}$ le complexe conjugué de $z$ et $|z|$ le module de $z$.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres complexes définie à partir du rang $n_0$, et $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite des points d'affixe $u_n$, pour $n \geqslant n_0$.

S'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n| \leqslant k$, on dira que les suites $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ sont bornées.

Si les suites $(\mathrm{Re}\, u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(\mathrm{Im}\, u_n)_{n \geqslant n_0}$ sont convergentes, de limites respectives $\alpha$ et $\beta$, on dira que les suites $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ convergent, que $l = \alpha + i\beta$ est la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et que le point L d'affixe $l$ est la limite de la suite $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ ; on notera alors $\lim u_n = l$ et $\lim P_n = L$.

On pourra utiliser sans démonstration les propriétés suivantes des suites de nombres complexes :

*a.* $\lim u_n = l$ si et seulement si $\lim |u_n - l| = 0$.

**Tournez la page S. V. P.**

*b.* Si $\lim u_n = l$, alors $\lim \bar{u}_n = \bar{l}$ et $\lim |u_n| = |l|$ ; si de plus $l \neq 0$, alors il existe $n_1$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_1$, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_1}$ converge et $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

*c.* Si $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = l'$, alors $\lim (u_n + v_n) = l + l'$ et $\lim u_n v_n = l\,l'$.

Soit A un point de plan, et $a$ l'affixe de A. On définit la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ par récurrence comme suit : $M_0 = A$, $M_{n+1} = f(M_n)$ pour tout $n$. On notera $z_n$ l'affixe de $M_n$, $x_n = \text{Re}\, z_n$ et $y_n = \text{Im}\, z_n$. On se propose dans cette partie d'étudier le comportement de la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ dans quelques cas.

1° *a.* On suppose que la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ converge. Quelle est sa limite ?

*b.* On suppose que la suite $(M_{2n})_{n \geqslant 0}$ converge. Quelles sont les limites possibles de $(M_{2n})_{n \geqslant 0}$ ?

Etudier alors la convergence de la suite $(M_{2n+1})_{n \geqslant 0}$.

2° On suppose que $a$ est un nombre réel. Discuter selon les valeurs de $a$ la convergence de la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$.

3° On suppose que les suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(|y_n|)_{n \geqslant 0}$ convergent. Soit $\alpha = \lim x_n$ et $\beta = \lim |y_n|$.

Montrer qu'il n'y a que deux valeurs possibles pour $(\alpha, \beta)$.

Établir alors la convergence des suites $(M_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(M_{2n+1})_{n \geqslant 0}$.

4° On suppose que la suite $(|z_n|)_{n \geqslant 0}$ converge. Soit $\lambda = \lim |z_n|$. Montrer que $\lim |1 + z_n| = 1$.

En déduire la convergence des suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(|y_n|)_{n \geqslant 0}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\lambda$ ?

5° On suppose que la suite $\left(\left|z_n + \frac{1}{2}\right|\right)_{n \geqslant 0}$ converge.

Soit $\mu = \lim \left|z_n + \frac{1}{2}\right|$.

Étudier la convergence de la suite $\left(\left|z_n + \frac{1}{4}\right|\right)_{n \geqslant 0}$, puis celle des suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(|y_n|)_{n \geqslant 0}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\mu$ ?



## III

On note $\Omega$ l'ensemble des points A tels que la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ (définie au II) converge vers O sans stationner (c'est-à-dire que pour tout $n$, $M_n$ est distinct de O).

On se propose dans cette dernière partie d'étudier quelques propriétés de $\Omega$.

1° Montrer que $\Omega$ possède un centre de symétrie, et deux axes de symétrie.

2° Soit J le point d'affixe $-1$. Établir que $f(\Delta)$ est inclus dans D (J, 1) ($\Delta$ défini au I, 4°).

En déduire que, lorsque A $\in \Delta$, la suite $(|z_n|)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante.

Établir que $\Omega$ contient $\Delta$.

3° Si A n'est pas dans D (I, $r_0$) (défini au I, 3°), montrer que la suite $\left(\left|z_n + \frac{1}{2}\right|\right)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas et que la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ n'est pas bornée.

Prouver que $\Omega$ est inclus dans D (I, $r_0$).

4° *a.* Montrer que A est dans $\Omega$ si et seulement si il existe un entier $k$ tel que $M_k \in \Delta$.

*b.* S'il existe un entier $k$ tel que $M_k$ ne soit pas dans D (I, $r_0$), que peut-on dire de A ?

*c. Application numérique :* on suppose que $a = \frac{p}{10} + \frac{i}{2}$ où $p$ est un entier relatif.

Déterminer pour quelles valeurs de $p$ A est élément de $\Omega$; on disposera les résultats des calculs effectués dans un tableau. Il est recommandé d'utiliser une calculatrice programmable.

5° Montrer l'existence d'un nombre réel $r_1 > 0$ tel que tous les points de $\Omega$ de coordonnées strictement positives soient dans le disque D (C, $r_1$), où C est le point d'affixe $ir_1$.